ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1975

2e INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

NOTA — *Les six questions sont totalement indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre arbitraire, sous réserve d'indiquer très lisiblement leur numéro.*

I — On considère l'intégrale $I_n = \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^3)^n}$

1°) Calculer I_1

2°) Établir une relation entre I_{n+1} et I_n
En déduire les valeurs de I_2 et I_3

3°) A partir des résultats précédents, calculer l'intégrale

$$J = \int_0^a y^{1/3} (a-y)^{2/3} \, dy$$

4°) Calculer l'intégrale double

$$I = \iint_\Delta x^{1/2} y^{1/3} (1-x-y)^{2/3} \, dx \, dy$$

Le domaine Δ étant limité par les droites d'équations :

$$x = 0$$
$$y = 0$$
$$x + y - 1 = 0$$

II — On considère un point M qui décrit une courbe plane d'un mouvement à accélération centrale. De plus si l'on pose $\vec{OM} = \rho \vec{u}$ (O étant un point fixe du plan), à chaque instant la relation suivante est vérifiée :

$$\vec{\Gamma} = \frac{-1}{\rho^2} \vec{u} \qquad \vec{\Gamma} \text{ (accélération du point M).}$$

A l'instant initial $t = 0$, on a $OM_0 = 1$ et l'angle que fait la vitesse initiale $\vec{V}_0$ avec $\vec{OM}_0$ est égal à $+\frac{\pi}{4}$

1°) Calculer la vitesse avec laquelle il faut lancer le point M pour que la trajectoire soit parabolique.

2°) Calculer le temps que mettra le point M pour arriver à la position M_1 telle que l'angle

$$(\vec{OM}_0, \vec{OM}_1) = \frac{\pi}{4}$$

III – Trouver les deux limites suivantes :

1°) - limite de $y \quad \left(\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)^{n^2}$ quand $n \to +\infty$

2°) - limite de $z = (x+1)^{1+\frac{1}{x+1}} - x^{1+\frac{1}{x}}$ quand $x \to +\infty$

IV – Dans un repère orthonormé (O, x, y, z) on considère la surface d'équation :

$$(S) \qquad z = f(x, y).$$

Le plan tangent au point M (x, y, z) appartenant à (S) coupe l'axe Oz en T.

1°) - Établir la relation qui existe entre $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ lorsque la surface est telle que : OT = OM

2°) - On pose $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad z = z$

Que devient la relation précédente ?

3°) - Intégrer cette équation différentielle en posant $z = \rho\,\mathrm{sh}\,\varphi$
φ étant une fonction de θ et ρ

4°) - Trouver l'équation de la surface (Σ) solution de cette équation différentielle qui contient l'hyberbole
$\begin{cases} x = 1 \\ 2yz = 1 \end{cases}$

V – Considérons deux droites fixes D et D' dans l'espace et la perpendiculaire commune à ces deux droites qui les coupe respectivement en A et B. Soit O le milieu de AB. Posons OA = OB = a.
Considérons le trièdre ayant comme origine le point O, comme axe Oz la perpendiculaire commune à D et D' et comme axes Ox et Oy les bissectrices des droites menées par O parallèlement à D et D'. (Ox, Oy, Oz forment un repère orthonormé). Soit φ l'angle de D avec Ox ; l'angle de D' avec Ox est par conséquent $-\varphi$.
On considère le torseur constitué par deux vecteurs, l'un $\vec{V}$ porté par D de **module variable** λ, l'autre $\vec{V}'$ porté par D' de **module variable** μ

1°) - Calculer la résultante $\vec{R}$ et le moment par rapport à O de ce torseur.

2°) - Équation de l'axe central de ce torseur.

3°) - Surface engendrée par l'axe central ;

VI – Calculer les déterminants suivants d'ordre n :
(exemple pour cas ou n = 5)

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Indications :

– Pour le calcul de D_n, on établira formule de récurrence

– Pour le calcul de Δ_n, on établira formule de récurrence du type :
$\Delta_n = \alpha\,\Delta_{n-1} + \beta\,\Delta_{n-2}$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail